

DOI: 10.16285/j.rsm.2017.07.011

基于极限分析法的溶洞顶板极限承载力研究

雷 勇¹, 尹君凡¹, 陈秋南¹, 杨 威²

(1. 湖南科技大学 岩土工程稳定控制与健康监测湖南省重点实验室, 湖南 湘潭 411201;

2. 湖南省农林工业勘察设计研究总院, 湖南 长沙 410007)

摘 要: 针对下伏溶洞顶板极限承载力问题, 提出了两种顶板极限承载力计算方法; 方法 1: 假定冲切体为圆锥台, 由极限平衡法得出极限平衡状态下破坏面上拉应力与剪应力同时作用时的极限承载力; 方法 2: 假定冲切体是以一个未知曲线为母线的旋转体, 由极限分析法求出其母线形式以及极限承载力的表达式, 通过求偏导获得了溶洞顶板的极限承载力。同时进行了下伏溶洞顶板极限承载力室内模型试验, 得到了 1~5 倍桩径顶板厚度下溶洞顶板基岩的破坏模式以及相应的极限承载力, 实测结果与理论吻合良好。研究表明: 溶洞顶板厚度为 $1D$ 至 $3D$ (D 为桩径) 时, 发生冲切破坏, 破坏模式是以曲线为母线的旋转体, $4D$ 时发生撕裂+冲切复合破坏, $5D$ 时基岩出现塑性破坏。在溶洞顶板厚度为 $1D \sim 4D$ 时, 同一跨径比条件下, 极限承载力随顶板厚度的增加呈线性增长, 达到 $5D$ 时, 顶板承载力与基岩基本一致。

关 键 词: 溶洞顶板; 极限承载力; 极限分析; 试验研究; 冲切破坏

中图分类号: TU 473

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2017) 07-1926-07

Determination of ultimate bearing capacity of cave roof using limit analysis method

LEI Yong¹, YIN Jun-fan¹, CHEN Qiu-nan¹, YANG Wei²

(1. Hunan Provincial Key Laboratory of Geotechnical Engineering for Stability Control and Health Monitoring, College of Civil Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan, Hunan 411201, China; 2. Hunan Prospecting Designing and Research Institute for Agriculture and Forestry Industries, Changsha, Hunan 410007, China)

Abstract: Two methods are proposed for the determination of the ultimate bearing capacity of cave roofs. Method 1: assuming that the punching body is a truncated cone, the ultimate bearing capacity of cave roofs can be determined by applying tensile stress and shear stress simultaneously on failure surface using limit bearing method. Method 2: assuming that the punching body is a rotating body with an unknown curve as the generatrix, the expression of the generatrix and the ultimate bearing capacity is obtained by the limit analysis method. The ultimate bearing capacity of the roof is obtained by partial derivatives. Laboratory model experiments of the ultimate bearing capacity of cave roofs are conducted. The failure modes and the corresponding ultimate bearing capacity are obtained when the roof's thickness varies from $1D$ to $5D$. The measured data is in good agreement with theoretical calculation result. The study shows that the punching shear failure mode happens when roof's thickness varies from $1D$ to $3D$, and the failure pattern has a surface of revolution with a curve shape. When roof's thickness reaches $4D$, a failure mode of tearing damage and punching shear failure occurs. Plastic failure develops when roof's thickness reaches $5D$. The ultimate bearing capacity increases linearly with the increase of roof's thickness from $1D$ to $4D$ in the same span-diameter ratio. When roof's thickness reaches $5D$, the ultimate bearing capacity of the cave roof is close to the ultimate bearing capacity of bedrock.

Keywords: cave roof; ultimate bearing capacity; limit analysis; experimental study; punching shear failure

1 引 言

当下伏溶洞顶板基岩完整且厚度不大时桩基易发生冲切破坏^[1]。目前国内外在研究岩溶区下伏溶

洞顶板极限承载力问题中, 赵明华等^[2-3]假定破坏冲切体为锥台, 拉应力与剪应力在破坏面上均匀分布, 并把两者分开考虑, 由极限平衡法得出溶洞顶板极限承载力; 柏华军^[4]在此基础上考虑了自重对结构

收稿日期: 2016-09-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 51208195); 岩土工程稳定控制与健康监测湖南省重点实验室开放基金资助(No. E21618)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51208195) and the Found of Hunan Provincial Key Laboratory of Geotechnical Engineering for Stability Control and Health Monitoring (E21618).

第一作者简介: 雷勇, 男, 1983 年生, 博士, 博士, 现任讲师, 主要从事桩基础及特殊土地基处理方面的教学与研究工作。E-mail: leiyonghnu@163.com

影响,对上述方法进行了完善。笔者通过研究认为,冲切破坏体并非标准的圆锥台,而是以螺旋线为母线的旋转体^[5-6]。为模拟岩溶区桩基溶洞顶板的破坏特征,刘铁雄^[7]采用相似理论,利用室内桩基物理模型,把岩溶地区顶板简化为一完整的矩形板,把岩溶地区的嵌岩灌注桩简化为承受竖向荷载的端承桩,对岩溶区桩基受力破坏性进行了研究。由于把岩溶顶板简化为一完整的矩形板,且将岩溶区桩基简化为只承受竖向荷载的端承桩,即可按照结构力学中局部荷载下板的受力特性及破坏模式对岩溶区桩基问题进行研究。张慧乐等^[8-9]在溶洞桩基的室内模型试验基础上,研究了桩底存在球形或椭圆形溶洞,及溶洞顶板厚度直径、赤道半径极半径与偏移位置等因素对承载能力和破坏模式的影响,并提出了4种不同条件下的破坏模式,然而,并未就提出的计算公式与试验结果进行对比。冯明伟^[10]基于两端固定的岩溶顶板进行了岩溶区桩基模型试验,获得了不同顶板厚度条件下桩基荷载传递规律、溶洞顶板荷载-位移曲线以及顶板的破坏形式。

由于溶洞桩基试验方面的研究资料较少,其试验成果及结论对岩溶区桩基的进一步深入研究弥足珍贵。本文针对下伏溶洞顶板极限承载力问题,提出了两种计算下伏溶洞顶板极限承载力的计算方法。为验证本文冲切破坏模式以及极限承载力计算方法的合理性,进行了下伏溶洞顶板桩基极限承载力室内模型试验,得到了1~5倍桩径的顶板厚度下溶洞顶板破坏模式以及相应的极限承载力。

2 岩层常用冲切模型

常用的冲切模型事先假定桩端岩层的破坏面,通过分析岩层顶板的临界破坏状态,即冲切面上应力的总和与桩端阻力相平衡的条件,得到桩端岩层的极限承载力。文献[2-4]假定,在桩端垂直荷载 P_p 作用下在桩底持力岩层中发生冲切破坏时形成一个冲切圆锥台,冲切面与锥台夹角 $\theta = 45^\circ - \varphi/2$ 。破坏锥台处于极限平衡状态时,锥台侧面分布拉应力及剪应力,但在计算时将两者分开考虑,其计算示意图如图1所示,图中 σ_k 为桩端应力。

按拉应力计算时,桩端极限承载力 P_1 为

$$P_1 = \sigma_t S \sin \theta \quad (1)$$

式中: σ_t 为锥台侧面拉应力; S 为锥台侧面积。

按剪应力计算时,桩端极限承载力 P_2 为:

$$P_2 = \tau S \cos \theta \quad (2)$$

式中: τ 为锥台侧面剪应力。

其中锥台侧面积为

$$S = \frac{\pi h}{\cos \theta} (D + h \tan \theta) \quad (3)$$

式中: h 为溶洞顶板厚度; D 为桩径。

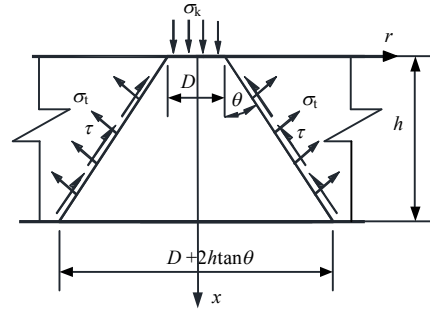


图1 冲切锥台
Fig.1 Punching shear frustum

通过上式计算得到的承载力与实际桩端承载力有较大差别,但总体上偏于安全。实际上基岩处于极限平衡状态时,破坏面上既有拉应力也有剪应力,但各自的发挥程度尚不清楚。

3 溶洞顶板极限承载力计算方法

3.1 极限平衡法

为得到溶洞顶板的极限承载力,本文在文献[2-4]的基础上,假定顶板基岩处于极限平衡状态时,破坏面上的拉应力与剪应力同时存在且均充分发挥,因此,极限承载力值为式(1)与式(2)之和,其表达式为

$$P = \frac{\pi h}{\cos \theta} (D + h \tan \theta) (\sigma_t \sin \theta + \tau \cos \theta) \quad (4)$$

母线如图1所示,其方程为

$$r(x) = \frac{D}{2} + x \tan \theta \quad (5)$$

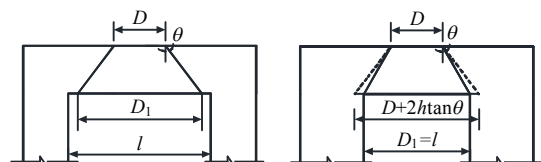
式中: $\theta = 45^\circ - \varphi/2$ 。

需要说明的是冲切角 θ 会受到溶洞顶板宽度 l 的限制,文献[2-4]中冲切角 θ 的假定是建立在顶板宽度 $l \geq D + 2h \tan \theta$ 的基础之上的,当 $l < D + 2h \tan \theta$ 时,破坏面被限定为一固定面,如图2所示,图中 D_1 表示冲切体底部直径。此时的极限承载力为

$$P = \frac{\pi(l+D)}{4} [(l-D)\sigma_t + 2h\tau] \quad (6)$$

其母线方程为

$$r(x) = \frac{D}{2} + \frac{l-D}{2h} x \quad (7)$$



(a) 当 $l \geq D + 2htan\theta$ 时破坏母线 (b) 当 $l < D + 2htan\theta$ 时破坏母线

图 2 不同顶板宽度 l 的破坏母线

Fig.2 Failure mode of cave roofs with different widths l

3.2 极限分析上限法^[11]

3.2.1 冲切破坏模型计算假定

为了简化问题并且使计算严谨可行, 作如下假定:

(1) 溶洞顶板为平板, 轴对称固支。

(2) 破坏面是以未知曲线为母线的旋转面, 冲切模式如图 3 所示, I、II 区为刚性区, III 区为塑性区, 塑性区是厚度为 δ 的轴对称旋转壳。

(3) 岩体为理想刚塑性材料, 顶板基岩完整且服从 Griffith 强度准则, 如图 4 所示。

(4) 在 (τ, σ) 平面内, 相应的应力与塑性应变同轴, 且服从相关流动法则。

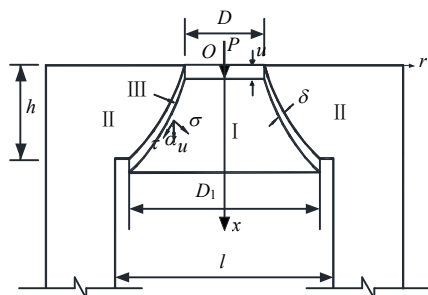


图 3 冲切体破坏模式

Fig.3 Failure mode of punching-shear cone

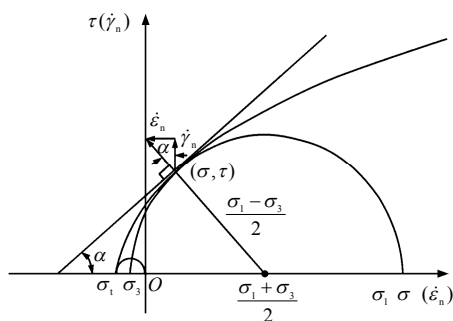


图 4 Griffith 强度准则剪应力(应变)形式

Fig.4 Shear stress(strain) form of Griffith strength criterion

3.2.2 冲切破坏模型上限分析

对于服从 Griffith 强度准则的材料, 其塑性势为

$$f = \tau - 2\sqrt{\sigma_t(\sigma + \sigma_t)} \quad (8)$$

根据相关流动法则, 塑性应变率表示为

$$\dot{\epsilon}_n = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = -\lambda \frac{\sigma_t}{\sqrt{\sigma_t(\sigma + \sigma_t)}} \quad (9)$$

$$\dot{\gamma}_n = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau} = \lambda \quad (10)$$

式中: $\lambda > 0$ 为比例系数。

由假定的破坏模式可知, 冲切体的容许运动方向竖直向下, 与 x 轴平行, 设运动速率为 $\dot{u}$ 。当应力与塑性应变率相对应的轴重合时, 根据相关流动法则, 塑性应变率方向必与屈服线垂直, 如图 4 所示, 这就相当于假设塑性区任一点的运动方向与破坏面的夹角也为 α 。

由图 4 可知, 塑性区任一点的应变率和该点的运动速率关系可表示为

$$\dot{\epsilon}_n = \frac{\dot{u}}{\delta} \sin \alpha \quad (11)$$

$$\dot{\gamma}_n = \frac{\dot{u} \cos \alpha}{\delta} \quad (12)$$

将式 (9) ~ (12) 联立求解, 得到应力的表达式为

$$\sigma = \sigma_t (\cot^2 \alpha - 1) \quad (13)$$

$$\tau = 2\sigma_t \cot \alpha \quad (14)$$

对于图 3 破坏模式, 外力做功与塑性区耗散功率相等, 即:

$$\dot{W}_e = \dot{W}_i \quad (15)$$

不考虑冲切体自重, 外力做功为

$$\dot{W}_e = P\dot{u} \quad (16)$$

式中: P 为作用在顶板基岩上的外部荷载。

塑性区耗散功率为

$$\dot{W}_i = \int_A d\dot{W}_i \quad (17)$$

式中: $d\dot{W}_i$ 为塑性区单位面积上的内能耗散率, 其表达式为

$$d\dot{W}_i = \delta(\sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3) dA \quad (18)$$

其中

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{\dot{\epsilon}_n}{2} + \sqrt{\left(\frac{\dot{\epsilon}_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\gamma}_n}{2}\right)^2} = \frac{\dot{u}}{2\delta} (\sin \alpha + 1) \quad (19)$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = \frac{\dot{\varepsilon}_n}{2} - \sqrt{\left(\frac{\dot{\varepsilon}_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\gamma}_n}{2}\right)^2} = \frac{\dot{u}}{2\delta}(\sin\alpha - 1) \quad (20)$$

又如图4所示,破坏面上应力可由主应力表示为

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin\alpha \quad (21)$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos\alpha \quad (22)$$

将式(13)、(14)及(21)、(22)联立求解得

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_t(1 + 2\sin\alpha)}{\sin^2\alpha} \quad (23)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_t(1 - 2\sin\alpha)}{\sin^2\alpha} \quad (24)$$

将式(19)、(20)、(23)和(24)代入式(18)中有

$$d\dot{W}_i = \frac{3\dot{u}\sigma_t}{\sin\alpha} dA \quad (25)$$

联立式(16)、(17)、(25)可得

$$P = 3\sigma_t \int_A \frac{dA}{\sin\alpha} \quad (26)$$

由图3的几何关系可知:

$$dA = \frac{2\pi r(x)}{\cos\alpha} dx \quad (27)$$

$$\tan\alpha = \frac{dr}{dx} = r' \quad (28)$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (r')^2}} \quad (29)$$

$$\sin\alpha = \frac{r'}{\sqrt{1 + (r')^2}} \quad (30)$$

将式(27)~(30)代入式(26)可得

$$P = 3\pi\sigma_t \int_0^h \left(\frac{1}{r'} + r' \right) r dx \quad (31)$$

3.2.3 冲切破坏模式的求解

由变分原理求 P 的极小值,令:

$$F(r, r') = \left(\frac{1}{r'} + r' \right) r \quad (32)$$

欧拉方程为

$$F - r'F_{r'} = C_1 \quad (33)$$

将式(32)代入式(33)求解可得母线方程为

$$r(x) = c_2 e^{c_1 x} \quad (34)$$

式中: C_1 、 C_2 为待定参数,将边界条件 $r(0)=D/2$, $r(h)=D_1/2$ 代入式(34),求得母线方程为

$$r(x) = \frac{D}{2} \left(\frac{D_1}{D} \right)^{x/h} \quad (35)$$

再将式(35)代入式(31),得到溶洞顶板的极限承载力:

$$P = 3\pi\sigma_t \left(\frac{D_1^2 - D^2}{8} + \frac{h^2}{\ln(D_1/D)} \right) \quad (36)$$

式中: D_1 实际上是个未知量,母线方程 $r(x)$ 和极限承载力 P 随着 D_1 的变化而变化。为求得最小的极限承载力,可将 P 对 D_1 求偏导,令 $\partial P / \partial D_1 = 0$,得到冲切体的直径为

$$D_1 = \frac{2h}{\text{LambertW}(2h/D)} \quad (37)$$

式中: LambertW 表示朗伯函数,是函数 $f(w)=we^w$ 的反函数,其具体应用参见文献[12]。

由式(37)可知,冲切破坏体底部直径只与桩径及顶板厚度有关,且对应惟一的极限荷载。同时其母线方程为

$$r(x) = \frac{D}{2} \left(\frac{2h}{D \text{LambertW}(2h/D)} \right)^{x/h} \quad (38)$$

以上推导均是建立在溶洞顶板宽度 l 足够大的前提下的,即 $l \geq 2h / \text{LambertW}[(2h)/D]$ 。当溶洞顶板宽度 l 较小时,即 $l < 2h / \text{LambertW}[(2h)/D]$ 时,破坏面被限定为一固定面,如图2所示,此时 D_1 为已知量且有 $D_1=l$,将式(35)、(36)中的 D_1 替换成 l 即可。

4 下伏溶洞基岩荷载试验研究

4.1 模型试验

为验证本文冲切破坏模式以及极限承载力计算方法的合理性,进行了下伏溶洞顶板及基岩极限承载力室内模型试验。采用水泥、石膏、砂和黏土按一定配合比模拟岩溶基岩,经试验测得砂浆试块单轴抗压强度为2.97 MPa,内摩擦角 $\varphi=30^\circ$,抗剪强度取单轴抗压强度1/10约300 kPa,抗拉强度取单轴抗压强度1/20约为150 kPa。基岩的浇筑分两次进行,首先浇筑20 cm的基岩底板,达到一定强度时采用半圆实石膏拱模,直径 $R=33$ cm,拱高为15 cm,分别进行顶板厚度为1D、2D、3D、4D及

5D 的小型荷载板试验,以及相应的基岩极限承载力试验,其中 $D=5.75\text{ cm}$ 。

本试验使用门式框架作为试验加载的反力装置,其由底座、立柱及反力梁 3 部分组成,将模型箱置于门式框架的底座之上,对基桩加载时,整体为一自平衡系统,加载系统及模型试验如图 5 所示。

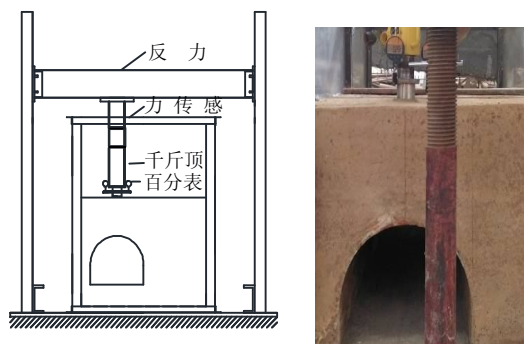


图 5 加载系统及模型试验
Fig.5 Loading system and model test

图 6 为不同溶洞顶板厚度下的顶板中点的荷载-沉降曲线图,由图可知,当溶洞顶板厚度为 1D、2D 和 3D 时,荷载-位移曲线均具有明显的陡降点。极限荷载分别为 10, 28 及 40 kN,当溶洞顶板厚度为 4D 时,在荷载为 30 kN 时发现裂缝,荷载曲线没有明显陡降,当达到 60 kN 时,溶洞顶板发生冲切破坏。

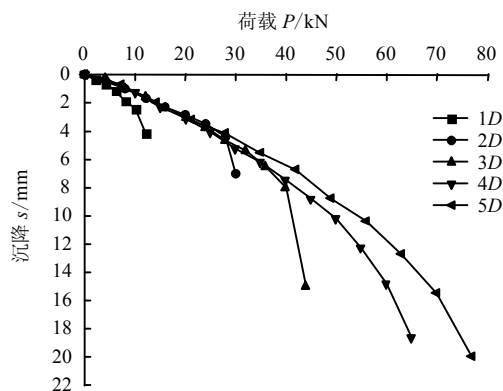


图 6 不同顶板厚度的荷载沉降曲线
Fig.6 Load-settlement curves for different values of h

在进行溶洞顶板承载力试验时,同时也对基岩承载力进行了校验,表 1 为 1~5 倍桩径时相应的基岩极限承载力。

图 7~11 为不同溶洞顶板厚度下的破坏示意图。由于试验中溶洞顶板底部为圆弧形,实际情况与本文理论的假定有一定的差别,1D~3D 时的冲

切体横向与纵向形状如图 7~9 所示。当溶洞顶板厚度为 4D,荷载为 30 kN 时发现裂缝,荷载曲线没有明显陡降,当达到 60 kN 时,溶洞顶板发生冲切破坏,但由于冲切发生在溶洞边缘,未能取出冲切体,如图 10 所示。当溶洞顶板厚度为 5D 时,荷载-位移曲线没有明显陡降点,根据沉降为 16 mm 判定极限承载力约为 72 kN,试验中发现,在荷载为 40 kN 时发现边缘裂缝,破坏后溶洞顶板未发现明显冲切体,但有明显的裂缝。如图 11 所示。

表 1 基岩及溶洞顶板极限承载力
Table 1 Ultimate bearing capacity of rock and cave roof

桩径 D	极限承载力/(kN/MPa)
1	77/29.7
2	75/28.9
3	72/27.7
4	77/29.7
5	77/29.7



(a) 纵向冲切体 (b) 横向冲切体

图 7 $h=1D$ 时破坏冲切体
Fig.7 Failure mode with $h=1D$



(a) 纵向冲切体 (b) 横向冲切体

图 8 $h=2D$ 时破坏冲切体
Fig.8 Failure mode with $h=2D$



(a) 纵向冲切体 (b) 横向冲切体

图 9 $h=3D$ 时破坏冲切体
Fig.9 Failure mode with $h=3D$

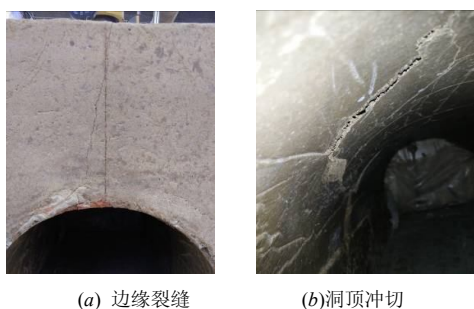


图 10 $h=4D$ 时破坏现象
Fig.10 Damage phenomenon with $h=4D$

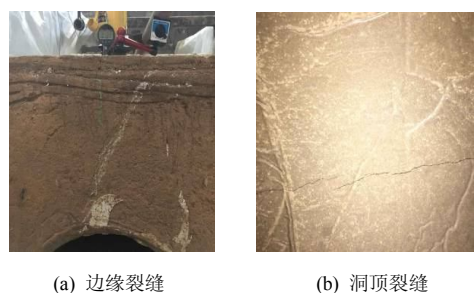


图 11 $h=5D$ 时破坏现象
Fig.11 Damage phenomenon with $h=5D$

实测顶板厚度以及相应的底面直径数据如表 2 所示。

表 2 实测冲切体底部直径

Table 2 Measured bottom diameters of punching cone			
顶板厚度 h/m	纵向直径 d_1/m	横向直径 d_2/m	拟合直径 D_1/m
0.060	0.19	0.13	0.16
0.125	0.23	0.16	0.20
0.185	0.28	0.2	0.24
0.230			0.33
0.290			

表中： $D_1=(d_1+d_2)/2$ 。

5 参数分析

5.1 冲切体母线的对比分析

将实测数据代入式 (9) 和式 (11)，得到本文两种方法的冲切体母线方程并作出曲线，再将试验所得冲切破坏旋转体横向与纵向的母线均按 1:1 的比例进行描点作出其曲线并对其进行拟合，然后将同一高度处的冲切体底部直径取为该高度处的横、纵向直径的平均值，得到最终的拟合母线。将实测的拟合母线与两种理论方法得到的母线进行对比，对比结果如图 12~14 所示。由图可见，本文采用的极限分析法所得母线能与实测的拟合母线很好地吻合。极限平衡法假定破坏模式为圆锥台，且冲切角 $\theta = 45^\circ - \varphi/2$ 时，其破坏面母线与实测的拟合母线有一定差别。

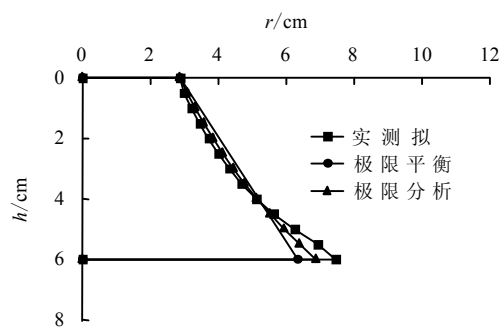


图 12 $h=6$ cm 时旋转体母线对比曲线
Fig.12 Contrast curves of rotary body's generatrix with $h=6$ cm

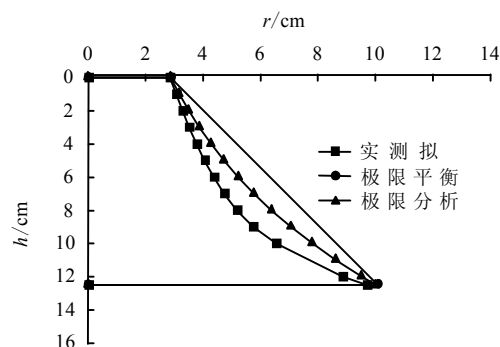


图 13 $h=12.5$ cm 时的旋转体母线对比曲线
Fig.13 Contrast curves of rotary body's generatrix when $h=12.5$ cm

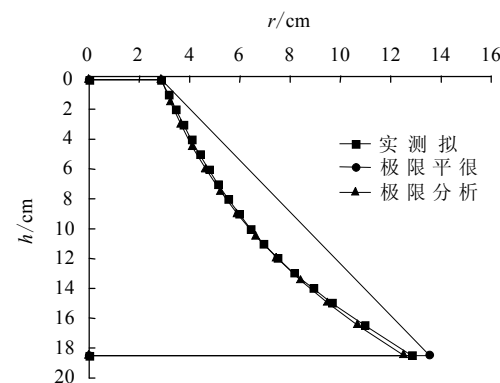


图 14 $h=18.5$ cm 时的旋转体母线对比曲线
Fig.14 Contrast curves of rotary body's generatrix with $h=18.5$ cm

5.2 极限承载力的对比分析

溶洞顶板厚度在 $1D \sim 3D$ 时产生了冲切破坏， $4D$ 时发生撕裂+冲切复合破坏，为将本文两种方法与文献[2~4]方法以及试验结果对比，分别用本文两种方法计算顶板厚度为 $1D \sim 4D$ 时溶洞顶板的理论极限承载力。

当顶板厚度为 $1D \sim 4D$ 时，将相关参数代入式 (4) 和式 (36) 得到相应的极限承载力。极限承载力的对比曲线如图 15 所示，由图可见，本文两种理论方法与实测结果吻合较好，极限平衡法稍偏于保

守。文献[2—4]单独考虑抗拉或抗剪时与实测结果相差较大。

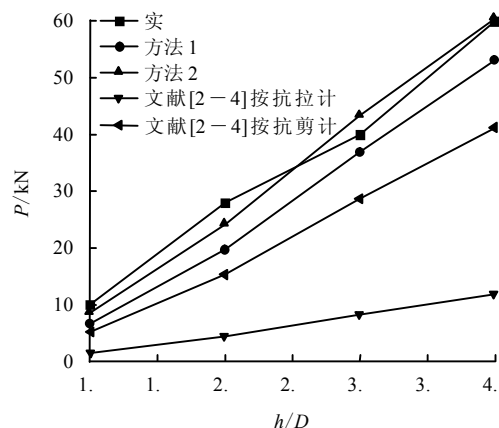


图 15 极限承载力对比曲线

Fig.15 Contrast curves of ultimate bearing capacity

6 结 论

(1) 溶洞顶板厚度为 $1D \sim 3D$ 时, 发生冲切破坏, 破坏模式是以曲线为母线的旋转体, $4D$ 时发生撕裂+冲切的复合破坏, $5D$ 时发生塑性破坏, 其承载力随顶板厚度的增加呈线性增长。

(2) 破坏模式假定为圆锥台, 单独考虑抗拉或抗剪时, 由极限平衡法得出的溶洞顶板极限承载力过于保守, 将两者同时考虑时, 结果与实测基本吻合, 稍偏于保守。

(3) 由极限分析法得出冲切体母线形状, 再通过求极值得出冲切体底面直径 D_1 , 以此得出的溶洞顶板极限承载力与实测吻合较好, 与极限平衡法比较更接近实际情况。

参 考 文 献

- [1] WYLLIE D C. Foundations on rock[M]. London: Chapman and Hall, 1992.
- [2] 赵明华, 陈昌富, 曹文贵, 等. 嵌岩桩桩端岩层抗冲切安全厚度研究[J]. 湘潭矿业学院学报, 2003, 18(4): 41—45.
ZHAO Ming-hua, CHEN Chang-fu, CAO Wen-gui, et al. Analysis for the safe terrain thickness of punching-shear resistance at the end of rock-socketed piles[J]. *Journal of Xiangtan Mining Institute*, 2003, 18(4): 41—45.
- [3] 赵明华, 曹文贵, 何鹏祥, 等. 岩溶及采空区桥梁桩基桩端岩层安全厚度研究[J]. 岩土力学, 2004, 24(1): 64—68.
ZHAO Ming-hua, CAO Wen-gui, HE Peng-xiang, et al. Study on safe thickness of rock mass at end of bridge foundation's pile in karst and worked-out mine area[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2004, 24(1): 64—68.
- [4] 柏华军. 考虑溶洞顶板自重时桩端持力岩层安全厚度计算方法[J]. 岩土力学, 2016, 37(10): 2945—2952.
BAI Hua-jun. A method for calculating the safety rock thickness of pile bearing strata with considering deadweight of karst cave roof[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2016, 37(10): 2945—2952.
- [5] 赵明华, 雷勇, 张锐. 岩溶区桩基冲切破坏模式及安全厚度研究[J]. 岩土力学, 2012, 33(2): 524—230.
ZHAO Ming-hua, LEI Yong, ZHANG Rui. Study of punching failure mode and safe thickness of pile foundation in karst region[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2012, 33(2): 524—230.
- [6] 雷勇, 陈秋南, 马缤辉. 基于极限分析的桩端岩层冲切分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(3): 631—638.
LEI Yong, CHEN Qiu-nan, MA Bin-hui. Punching analysis of rock at pile tip on limit analysis[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2014, 33(3): 631—638.
- [7] 刘铁雄. 岩溶顶板与桩基作用机理分析与模拟试验研究[D]. 长沙: 中南大学, 2003.
LIU Tie-xiong. Analysis and model test research of mechanism between karst roof and pile foundation [D]. Changsha: Central South University, 2003.
- [8] 张慧乐, 张智浩, 王述红, 等. 岩溶区嵌岩桩的试验研究与分析[J]. 土木工程学报, 2013, 46(1): 92—103.
ZHANG Hui-le, ZHANG Zhi-hao, WANG Shu-hong, et al. Experimental study and analysis on rock-socketed pile in karst area[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2013, 46(1): 92—103.
- [9] 张慧乐, 马凛, 张智浩, 等. 岩溶区嵌岩桩承载特性影响因素试验研究[J]. 岩土力学, 2013, 34(1): 92—100.
ZHANG Hui-le, MA Lin, ZHANG Zhi-hao, et al. Test research on factors influencing bearing capacity of rock-socketed piles in karst area[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2013, 34(1): 92—100.
- [10] 冯明伟. 岩溶区桥梁桩基承载机理及试验研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2014.
FENG Ming-wei. The bearing mechanism and experimental research of bridge pile foundation in karst area[D]. Changsha: Hunan University, 2014.
- [11] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier Science, 1975: 28—63.
- [12] RATHIE R N, SILVA P D. Applications of Lambert W function[J]. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 2011, 23(D11): 1—15.